E.N.S.E.T. Section A_3 1985

DURÉE : 4 heures

Dans le problème, on examine différentes extensions de la notion d'intégrales généralisées.

f étant une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, on définit une de ses primitives au moyen de $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Trois sortes de convergences sont définies.

- Si $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(u)\,du$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale de f converge au sens habituel et on pose :

$$I(f) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t f(u)\,du = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$$

- Si $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-xt} f(t)\,dt$ existe pour tout réel x strictement positif et si, en outre, $\lim_{x \to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale de f est A — convergente et on pose :

$$A(f) = \lim_{x \to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$$

- Si $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u)\,du$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale de f est C — convergente et on pose :

$$C(f) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u)\,du.$$

On se propose d'établir quelques relations entre ces différentes convergences pour une même fonction f.

On rappelle la condition de Cauchy pour la convergence (au sens habituel) de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$:

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists T_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que :} \quad T' > T \geqslant T_0 \Rightarrow \left| \int_T^{T'} f(t)\,dt \right| < \varepsilon \right\}$$

PREMIÈRE PARTIE

(Étude d'exemples)

1° *a.* Calculer l'intégrale $\int_0^T e^{-xt} f(t)\,dt$ dans les deux cas suivants :

$$f(t) = \cos t, \qquad f(t) = \sin t$$

b. Examiner successivement, pour les fonctions f précisées ci-dessous, l'existence des limites $I(f)$, $A(f)$, $C(f)$ et calculer ces nombres dans les cas où ils existent.

$f_1(t) = \sin t$

$f_2(t) = e^{-t} \sin t$

$f_3(t) = e^{2t} \cos(e^t)$

(Pour la C — convergence relative à la fonction f_3, on pourra, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est convergente).

2° k étant un réel strictement positif donné, on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si} \quad t \in [0,\ 1] \\ f(t) = \dfrac{1}{t^k} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

a. Étudier, suivant les valeurs de k, l'existence et la valeur de $I(f)$ puis celles de $C(f)$.

b. Montrer que si $k > 1$ et si $T > 1$:

$$\lim_{x \to 0+} \int_1^T \frac{1 - e^{-xt}}{t^k}\, dt = 0$$

Déduire de cette propriété que :

$$\lim_{x \to 0+} \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t^k}\, dt = 0$$

c. Étudier, suivant les valeurs de k, l'existence et la valeur de $A(f)$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f une fonction quelconque, continue sur $[\,0, +\infty\,[$, à valeurs réelles.

1° On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge au sens habituel. Montrer que cette intégrale est C – convergente (c'est-à-dire $C(f)$ existe) et que $C(f) = I(f)$. On pourra majorer $\left| \frac{1}{t} \int_0^t [\,F(u) - I(f)\,]\, du \right|$ en la décomposant en deux parties.

2° On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est convergente (absolue convergence au sens habituel). Montrer que $A(f)$ existe et que $A(f) = I(f)$. Pour cela, on pourra commencer par prouver que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T_0 \quad \text{tel que} \quad \left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^{T_0} (1 - e^{-xt}) \left| f(t) \right| dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

le nombre T_0 étant indépendant de $x \in \mathbb{R}^+$.

3° *a.* On suppose qu'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall a > 0, \quad \forall t > a \qquad \left| \int_a^t f(u)\, du \right| \leqslant M$$

Montrer, en utilisant une primitive convenable de f et une intégration par parties, que :

$$\forall x > 0,\ \forall a > 0,\ \forall t > a \qquad \left| \int_a^t e^{-xu} f(u)\, du \right| \leqslant M\, e^{-ax}$$

En déduire, sous l'hypothèse indiquée, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$ existe pour tout $x > 0$.

b. Montrer que si $I(f)$ existe, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$ existe pour tout $x > 0$.

c. On suppose que I (f) existe, montrer que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ a_0 > 0$ tel que :

$$\left| \int_0^{+\infty} (e^{-xu} - 1) f(u)\, du \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^{a_0} (1 - e^{-xu})\, |f(u)|\, du + \left| \int_{a_0}^{+\infty} e^{-xu} f(u)\, du \right|$$

a_0 étant indépendant de x.

En déduire que A (f) existe et que A (f) = I (f).

4° Montrer que :

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

TROISIÈME PARTIE

1° Soit f continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives.

a. Montrer que si l'intégrale de f est C − convergente, alors $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ existe au sens habituel.

b. Montrer que si l'intégrale de f est A − convergente, alors $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ existe au sens habituel.

2° On suppose que f est continue sur $[0, +\infty[$, vérifie $\lim_{t \to +\infty} t f(t) = 0$ et que l'intégrale de f est A − convergente.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge au sens habituel. Pour cela, on pourra examiner la différence

$$\int_0^{\frac{1}{x}} f(t)\, dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

et prouver d'abord, à l'aide de l'inégalité $0 \leqslant 1 - e^{-xt} \leqslant xt$, que $\lim_{x \to 0+} \int_0^{\frac{1}{x}} f(t)\, (1 - e^{-xt})\, dt = 0$.

3° Dans cette question, on suppose que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$ existe et on pose :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

a. On suppose que $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$. Montrer que : $\lim_{x \to 0+} x^2 g(x) = 0$.

b. On suppose, au voisinage de l'infini, l'équivalence : $f(t) \sim A\, t$ (où A est une constante non nulle); montrer que, lorsque x tend vers 0, $g(x) \sim \frac{A}{x^2}$.

c. En déduire que si la primitive F vérifie : $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \sim Ax$, au voisinage de l'infini ($A \neq 0$) alors g vérifie $g(x) \sim \frac{A}{x}$ au voisinage de 0.

(On pourra utiliser une intégration par parties pour se ramener à ce qui précède.) Montrer que la réciproque de cette dernière propriété n'est pas nécessairement vraie, en utilisant par exemple $t \rightsquigarrow 1 + \sin t + t \cos t$.

d. En supposant toujours : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$ convergente $\forall\ x > 0$, montrer que la C − convergence de l'intégrale de f entraîne la A − convergence et que l'on a C (f) = A (f).